ENSAE (2022/2023)
TEST DE PRESELECTION AU CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS STATISTICIENS ECONOMISTES (CYCLE LONG) ET D'ANALYSTES STATISTICIENS - DURÉE = 3H

La clarté de la rédaction ainsi que la justification des résultats seront prises en compte dans la notation.

Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.

Exercice 1

A tout $n \in \mathbb{N}$ on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$.
On note par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère cartésien du plan.

(1) Etudier les fonctions f_0, f_1 et f_2 et tracer, dans un même repère, les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

(2) (a) Etudier la parité de f_n en fonction de celle de n.
(b) Etudier la périodicité de f_n.
(c) Montrer que $f_n(\frac{\pi}{2} - x) = (-1)^n f_n(\frac{\pi}{2} + x), \forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.
(d) Déduire de ce qui précède qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On précisera les transformations géométriques permettant d'obtenir sa courbe globale.

(3) (a) Etudier les variations de f_n sur $[0, \frac{\pi}{2}], n \geqq 3$.
(b) Déterminer, en fonction de n, la valeur maximale, y_n, prise par f_n sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme P_n défini par $P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{2n} x^k, \forall x \in \mathbb{R}$.

(1) Etudier et représenter graphiquement P_2.

(2) On pose $\varphi_n(x) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
(a) Etudier les variations de φ_n sur $\mathbb{R}$.
(b) Justifier l'existence d'un unique réel $\alpha_n \in]-1, 0[$ tel que $\varphi_n(\alpha_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(3) (a) Déduire de (2) l'étude des variations de P_n sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que $P_n(x) \geq P_n(\alpha_n) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ telle que $U_1 = 1$ et $U_n = U_{n-1} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 2$.

(1) (a) Exprimer U_n à l'aide du symbole $\sum$, puis montrer que $\sqrt{n} \leq U_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire la nature de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.

(2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} V_n = 2\sqrt{n} - U_n \\ W_n = 2\sqrt{n+1} - U_n \end{cases}$

(a) Montrer que (V_n) et (W_n) sont deux suites adjacentes.

(b) Soit l leur limite commune.

Déterminer n_0 pour que V_{n_0} soit une valeur approchée par défaut de l à 10^{-3} près.

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{\sqrt{n}}$.

(3) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}, n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre S_n, U_n et U_{2n}.

(b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4

(1) Dans une urne U_1, on a placé 4 jetons portant le nombre 100 et 3 jetons portant le nombre 200. On extrait simultanément et au hsard 3 jetons de U_1 et on note par S la somme des nombres inscrits sur ces 3 jetons.

(a) Déterminer toutes les valeurs possibles de S.

(b) Déterminer le nombre de tirages correspondant à :

(i) $S = 400$

(ii) $S = 500$

(2) On considère une seconde urne U_2 contenant 3 jetons marqués 100 et 2 jetons marqués 200. Un tirage consiste à extraire un jeton de U_1 puis un jeton de U_2.

(a) Calculer le nombre de tirages possibles.

(b) Calculer le nombre de tirages donnant 2 jetons portant le même nombre.

FIN DU SUJET (Recto-Verso)

BAREME

Exercice 1 : 5pts = 1 + (0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5) + (1 + 1)
Exercice 2 : 5pts = 1 + (1 + 1) + (1 + 1)
Exercice 3 : 5pts = (0,5 + 0,5) + (1 + 0,5 + 1) + (0,5 + 1)
Exercice 4 : 5pts = (1 + (1 + 1)) + (1 + 1)