ENSAE (2020/2021)
TEST DE PRESELECTION AU CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS STATISTICIENS ECONOMISTES (CYCLE LONG) ET D'ANALYSTES STATISTICIENS - DURÉE = 3H

La clarté de la rédaction ainsi que la justification des résultats seront prises en compte dans la notation.
Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.

Exercice 1
A tout réel α donné tel que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$, on associe la fonction f_α telle que $f_\alpha(x) = \dfrac{(\alpha^2+1)x^2+\alpha^2-1}{(\alpha+1)x+\alpha-1}$. On désigne par $\mathcal{C}_\alpha$ la courbe représentative de f_α.

(1) Montrer que $\mathcal{C}_\alpha$ admet deux asymptotes dont on précisera, pour chacune, une équation cartésienne.
(2) Soit I_α le point d'intersection de ces deux asymptotes.
   (a) Déterminer, en fonction de α, les coordonnées de I_α.
   (b) Que représente I_α pour la courbe $\mathcal{C}_\alpha$?.
   (c) Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}, I_\alpha$ appartient à une courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = g(x)$ où g est une fonction que l'on précisera.
   (d) Etudier la fonction g et tracer $\mathcal{C}$.
(3) Etudier, suivant les valeurs de α, les variations de f_α.
(4) Représenter (dans un autre repère) les courbes $\mathcal{C}_{-2}, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$.

Exercice 2
(1) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\tan x}{x}, \forall x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{0^+} g$ et $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g$
   (b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire les variations de la fonction g.
   (c) Montrer que g est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle que l'on précisera.
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n, définie par :
   $f_n(x) = 2n\tan(x) - \tan(nx), x \in]0, \dfrac{\pi}{2n}[$
   (a) Déterminer $\lim\limits_{0^+} f_n, \lim\limits_{\frac{\pi}{2n}^-} f_n$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_n(x)}{nx}$

   (b) En déduire que f_n s'annule au moins une fois sur $]0, \frac{\pi}{2n}[$, pour $n \geqslant 2$
   (c) Soit $x_n \in]0, \frac{\pi}{2n}[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tan(nx_n)}{nx_n}$

Test de présélection aux concours d'entrées à l'ENSAE d'Avril 2020

Corrigé de l'épreuve

Exercice 1

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 \iff (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - \sin 2x = 1$$
$$\iff \sin 2x = 0 \iff 2x = 4\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \boxed{x = \frac{1}{2}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exercice 2

1. $\tan(3\theta) = \tan(2\theta + \theta) = \dfrac{\tan(2\theta) + \tan(\theta)}{1 - \tan(2\theta)\tan\theta} = \dfrac{\dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} + \tan(\theta)}{1 - \dfrac{2\tan^2\theta}{1 - \tan^2\theta}} = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

   $\boxed{\tan(3\theta) = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}}$

2. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\left\{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

   La restriction de tangente à $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ étant une bijection de I sur $\mathbb{R}$, on peut donc poser $x = \tan\theta$ et $a = \tan\alpha$, avec $\theta \in I$ et $\alpha \in I\backslash\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}\right\}$

   L'équation : $\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \dfrac{3a - a^3}{1 - 3a^2}$ devient alors :

$$\tan(3\theta) = \tan(3\alpha)$$
$$3\theta = 3\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\theta = \alpha + \frac{1}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\theta \in \left\{\alpha, \alpha + \frac{1}{3}\pi, \alpha + \frac{2}{3}\pi\right\}$$

   D'où $\boxed{x = \tan\theta \in \left\{\tan\alpha = a, \dfrac{a + \sqrt{3}}{1 - a\sqrt{3}}, \dfrac{a - \sqrt{3}}{1 + a\sqrt{3}}\right\}}$

Remarque : La résolution directe donne

$(x-a)\Big[(3a^2-1)x^2+8ax+3-a^2\Big]=0$

Soit $x=a$ ou $x=\dfrac{-4a\pm(a^2+1)\sqrt{3}}{3a^2-1}$ (mêmes résultats)

Exercice 3

Soit $\alpha\in]0,\pi[,\ P_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\sin(2x)=2\cos x\sin x\Rightarrow\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^{k-1}}\right)=\sin\left(2\dfrac{\alpha}{2^k}\right)=2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2^k}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^k}\right)$

Donc $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2^k}\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^k}\right)},\ \forall\ k=1,2,\cdots,n$

$P_n=\dfrac{\sin\alpha}{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^2}\right)}\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^3}\right)}\times\cdots\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)}$

$P_n=\dfrac{\sin(\alpha)}{2^n\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)}=(\sin\alpha)\times\dfrac{\dfrac{\alpha}{2^n}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)}\times\dfrac{1}{\alpha}\underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

car $x=\dfrac{\alpha}{2^n}\to 0$ quand $n\to+\infty$ et $\dfrac{\sin x}{x}\underset{(n\to 0)}{\longrightarrow}1$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}P_n=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}$

Exercice 4

$(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_{n+1}=2U_n+2^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$

On pose : $V_n=\dfrac{U_n}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}$

1. On a $V_{n+1}=\dfrac{U_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{2U_n+2^n}{2^{n+1}}=\dfrac{U_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}=V_n+\dfrac{1}{2}$

   $\boxed{V_{n+1}=V_n+\dfrac{1}{2}}$

   Donc (V_n) est la suite arithmétique de raison $r=\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $V_0=U_0$.

2. $V_n=V_0+nr\Rightarrow U_n=2^nV_n=2^n(V_0+nr)=2^n\Big(U_0+\dfrac{1}{2}n\Big)$

   $\boxed{U_n=2^nU_0+n2^{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}}$

Exercice 5

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $U_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_kU_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r}\Big(\frac{1}{U_k} - \frac{1}{U_{k+1}}\Big)$, où r = raison de (U_n)

$$= \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{U_k} - \frac{1}{U_{k+1}}\Big) = \frac{1}{r}\Big(\frac{1}{U_0} - \frac{1}{U_{n+1}}\Big) = \frac{1}{r}\Big(\frac{U_{n+1}-U_0}{U_0U_{n+1}}\Big) = \frac{1}{r}\Big(\frac{U_0+(n+1)r-U_0}{U_0U_{n+1}}\Big)$$
$$= \frac{1+n}{U_0U_{n+1}}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_kU_{k+1}} = \frac{1+n}{n_0U_{n+1}}}$$

2. Application : Prenons $U_n = 2n-1,\ \forall n \in \mathbb{N}$

   (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = -1$

   Donc, d'aprés 1), on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_kU_{k+1}} = \frac{n+1}{2n+1}$

   Comme $U_k = 2k-1$ et $U_{k+1} = 2k+1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = -\frac{n+1}{2n+1}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = -\frac{1}{2}}$$

Exercice 6

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_0 > 0$ et $U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{U_n} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$

1. On a $U_0 > 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{U_n}(U_n^2 - U_n + 1),\ \forall n \in \mathbb{N}$

   $U_{n+1} = \dfrac{1}{U_n}\Big[\Big(U_n - \dfrac{1}{2}\Big)^2 + \dfrac{3}{4}\Big],\ \forall n \in \mathbb{N}$

   Donc si $U_n > 0$ alors $U_{n+1} > 0$.

   Par conséquent, on a $U_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

2. $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{U_n} - 1 = \dfrac{1-U_n}{U_n}$

   Or $U_{n+1} - 1 = U_n + \dfrac{1}{U_n} - 2 = \dfrac{U_n^2 - 2U_n + 1}{U_n} = \dfrac{1}{U_n}(U_n - 1)^2 \geq 0$

   Donc $U_{n+1} - U_n \leq 0$: la suite (U_n) est décroissante. (2)

   (1) et (2) $\Rightarrow$ (U_n) est une suite convergente.

   Si $l = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} U_n$, alors on a $l = l + \dfrac{1}{l} - 1$

D'où $\boxed{l=1}$

Exercice 7

On pose : $\begin{cases} U_n &= 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\ V_n &= 2^n \tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{cases} U_n > 0 \\ V_n > 0 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. $\star$ $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 2\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = 2\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)} = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)} > 1$

   La suite (U_n) est strictement croissante.

   $\star$ $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 2\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)} = \dfrac{2\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{\dfrac{2\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{1-\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}} = 1-\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right) < 1.$

   La suite (V_n) est strictement décroissante.

   $\star$ $V_n - U_n = ?$

$$\begin{aligned}
V_n - U_n &= 2^n\left[\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right] \\
&= 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} - 1\right] \\
&= 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \times \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \times \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right] \\
&= 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \times 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\,\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} \times \sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \times 1 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

   <u>Conclusion</u> : (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes.

2. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\dfrac{\pi}{2^{n+2}}} = \dfrac{\pi}{4} \times 1$

   D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \dfrac{\pi}{4}}$

Exercice 8

$\forall n \in \mathbb{N}^{*}*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_{+} = [0; +\infty[$, on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$

1. Étudions les variations de f_n sur $[0; +\infty[$

   $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_{+}$

x	0		U_n		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f_n(x)$	-1			$\nearrow$			$+\infty$

   f_n étant une bijection de $\mathbb{R}_{+}$ sur $[-1; +\infty[= f(\mathbb{R}_{+})$

   Comme $0 \in f(\mathbb{R}_{+})$, donc $\exists!\ U_n \in \mathbb{R}_{+}/f_n(U_n) = 0$

   Par ailleurs $\left\{\begin{array}{rcl} f_n(0) & = & -1 \\ f_n(1) & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow f_n(0).f_n(1) < 0$, donc $\boxed{0 < U_n < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^{*}}$

2. On a $\left\{\begin{array}{rcl} f_n(U_{n+1}) - f_{n+1}(U_{n+1}) & = & \Big(U_{n+1}^{n} + U_{n+1} - 1\Big) - \Big(U_{n+1}^{n+1} + U_{n+1} - 1\Big) \\ f_n(U_{n+1}) - f_{n+1}(U_{n+1}) & = & f_n(U_{n+1}) - 0 = f_n(U_{n+1}) \end{array}\right.$

   Donc $U_{n+1}^{n} - U_{n+1}^{n+1} = f_n(U_{n+1})$

   or $U_{n+1}^{n} - U_{n+1}^{n+1} = U_{n+1}^{n}(1 - U_{n+1}) > 0$ car $0 < U_{n+1} < 1$

   $f_n(U_{n+1}) > 0 = f_n(U_n)$

   Comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_{+}$, alors $\boxed{U_{n+1} > U_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^{*}}$

   La suite (U_n) est croissante et majorée donc convergente.

   Posons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. Alors comme $0 < U_{n+1} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^{*}$, donc $0 \leq l \leq 1$.

   Supposons $l < 1$, alors comme $U_n^n + U_n - 1 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^{*}$ et $0 \leq U_n^n \leq l^n,\ \forall n \in \mathbb{N}^{*}$,

   on a $l^n \to 0 \Rightarrow U_n^n \to 0$ et donc

   $\left\{\begin{array}{rcl} U_n^n + U_n - 1 & \longrightarrow & l - 1 < 0 \\ U_n^n + U_n - 1 & \longrightarrow & 0 \end{array}\right.$

   Contradiction : donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1}$

Exercice 9

1. Soient a, b, c trois réels donnés tels que :

$$\begin{aligned}\frac{2}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \\ &= \frac{a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \\ &\frac{a(x^2+3x+2) + b(x^2+2x) + c(x^2+x)}{x(x+1)(x+2)} \\ &\frac{(a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a}{x(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

Par identification, on a le système

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 3a+2b+c &= 0 \\ 2a &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b+c &= -1 \\ 2b+c &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c &= 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*}$$

2. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\Big) - 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \ \forall x \in \mathbb{N}^*}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}}$$

Exercice 10

1. $$\begin{aligned}\operatorname{cotan}(\theta) - 2\operatorname{cotan}(2\theta) &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 2\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta\sin(2\theta) - 2\sin\theta\cos(2\theta)}{\sin\theta\sin(2\theta)} \\ &= \frac{2\cos^2\theta\sin\theta - 2(\sin\theta)(2\cos^2\theta - 1)}{\sin\theta\sin(2\theta)} \\ &= \frac{2\sin^3\theta}{2\sin^2\theta\cos\theta}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\boxed{\operatorname{cotan}(\theta) - 2\operatorname{cotan}(2\theta) = \tan\theta}$$

2. Prenons par exemple θ dans $]0, \pi[$, donc $\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ existe $\forall k \in \mathbb{N}^*$

   On a alors $\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^k}\right) - 2\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right), \ \forall k \in \mathbb{N}^*$

   donc $\underbrace{\frac{1}{2^k}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}_{U_k} - \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}_{U_{k-1}} = \frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(U_k - U_{k+1}) = U_n - U_0 = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \operatorname{cotan}\theta$$

   $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \operatorname{cotan}\theta, \ \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

   Comme $\frac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{\theta} \times \frac{\theta}{2^n}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

   $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotan}\theta = \lim\limits_{x\to 0} x\frac{\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cos x = 1 \times 1 = 1$

   Alors pour $x = \frac{\theta}{2^n} \to 0$ quand $(n \to +\infty)$, on a

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{1}{\theta} - \operatorname{cotan}\theta}$$

Exercice 11

$$f(x) = x - \sqrt{x - E(x)} \text{ où } \begin{cases} E(x) \in \mathbb{Z} \\ E(x) \leq x \leq E(x) + 1 \end{cases}$$

Soit $m \in \mathbb{Z}$ on a $\forall x \in [m, m+1[, \ E(x) = m$ et $f(x) = x - \sqrt{x - m}$

$\forall x \in [m-1, m[, \ E(x) = m - 1$ et $f(x) = x - \sqrt{x - m + 1}$

donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to m^+} f = \lim\limits_{\substack{x\to m \\ x \geq m}} x - \sqrt{x - m} = m = f(m) \\ \lim\limits_{x\to m^-} f = \lim\limits_{\substack{x\to m \\ x \leq m}} x - \sqrt{x - m + 1} = m - 1 \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{x\to m^+} f \neq \lim\limits_{x\to m^-} f$ $\boxed{\text{donc } f \text{ n'est pas continue en } m}$.

Cependant f est continue à droite en m.

Exercice 12

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1. (a) $f(x) = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2, \ \forall x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f = 0 = f(0)$. Donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$

(b) $\left| \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|, \ \forall x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'(0)$. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0}$.

2. $\forall x \neq 0$ on a $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\begin{cases} f'(x) &= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \ x \neq 0 \\ f'(0) &= 0 \end{cases}$$

Si f' était dérivable en 0, alors on aurait

$\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f'(0) = 0 - 0 = 0$

Or $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

En effet si $x = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $x' = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$, on a $\begin{cases} x & \to & 0 \\ x' & \to & 0 \end{cases}$ quand $n \to +\infty$

mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 2n\pi = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \cos\left(\frac{1}{x'}\right) = \cos(2n\pi + \pi) = -1$ <u>Contradiction</u>

$\boxed{f' \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

Exercice 13

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{P_1(x)}{(x^2+1)^{1+1}}$

$f''(x) = \dfrac{-2(x^2+1)^2 - 4x(-2x)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \dfrac{-2+8x^2}{(x^2+1)^3} = \dfrac{P_2(x)}{(x^2+1)^{2+1}}$

Supposons $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$ où $P_n(x) =$ polynôme

alors $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{[P'_n(x)](x^2+1)^{n+1} - 2(n+1)x(x^2+1)^n P_n(x)}{(x^2+1)^{2n+2}}$

$f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(x^2+1)P'_n(x) - 2(n+1)xP_n(x)}{(x^2+1)^{2n+2}} = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{(n+1)+1}}$

avec $P_{n+1}(x) = (x^2+1)P'_n(x) - 2(n+1)xP_n(x)$

<u>Conclusion</u> : par récurrence

Exercice 14

$f(x) = \dfrac{x^3 + |x|}{x^2 - |x|}$

Donc $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x}{x^2 - x} = \dfrac{x^2+1}{x-1} \ si\ x > 0\ et\ x \neq 1 \\ \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x} \to \dfrac{x^2-1}{x+1} = x^2 - 1\ si\ x < 0\ et\ x \neq -1 \end{cases}$

Donc $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} f = -2 \quad$ (f est prolongeable par continuité en -1)

$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to0^-} f & = & \lim\limits_{x\to0^-} (x-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f & = & \lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ est prolongeable par continuité en 0.

$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to1^-} f & = & \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x<1}} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -1 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f & = & +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ Asymptote verticale 1 $x = 1$.

• $\forall x > 0, x \neq 1$ on a $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ . \qquad x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad x = 1 + \sqrt{2}$

• $\forall x < 0, x \neq -1$ on a $f'(x) = 1 > 0$

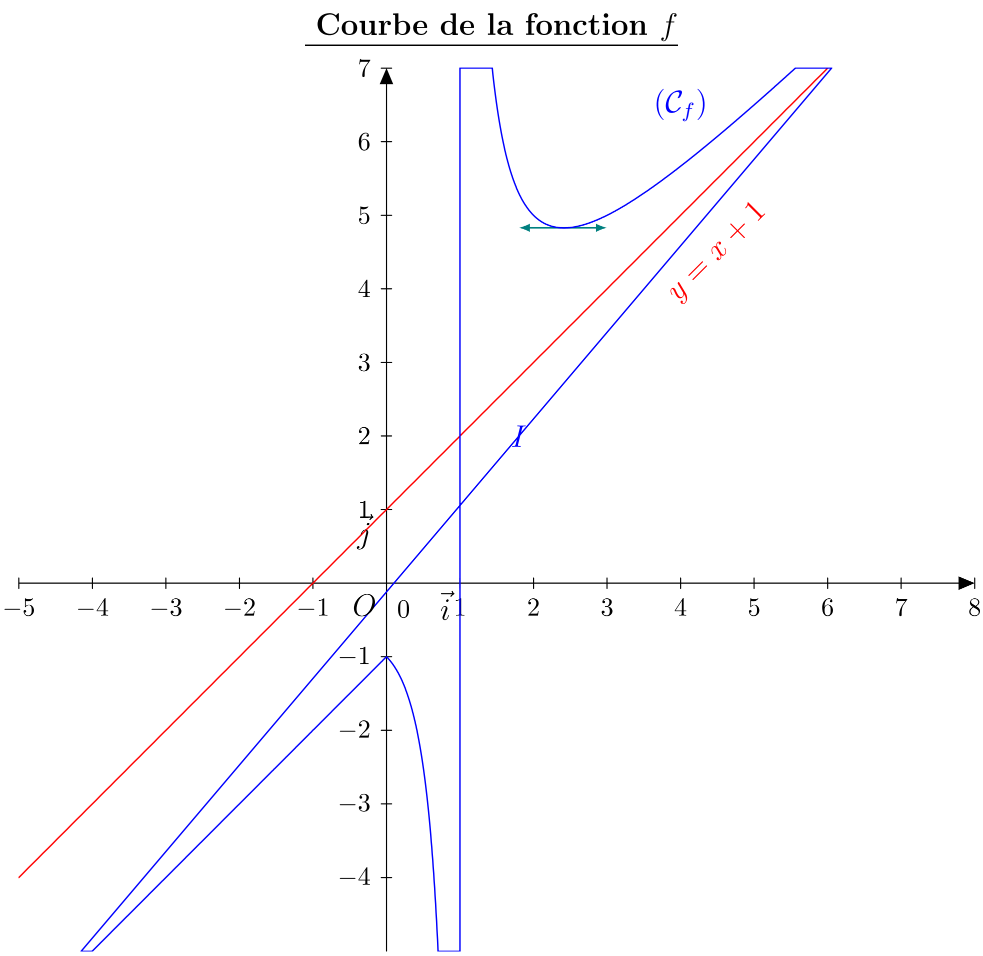
x	$-\infty$		-1		0		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2 ‖ -2	↗	-1 ‖ -1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2(1+\sqrt{2})$	↗	$+\infty$

$f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$ quand $x > 0,\ x \neq 1$

La droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

Comme $f(x) - y = \dfrac{2}{x-1} > 0$ si $x > 1$

Donc C_f est au dessus de Δ sur $]0;+\infty[$ et en dessous sur $]-\infty,1[$



Exercice 15

$$f(x) = \frac{x^n + ax + b}{x^2 - 1},\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \text{ et } n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R} \text{ fixes}$$

f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ si et ssi

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 1} f & \in & \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to -1} f & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \text{ donc si et ssi } \left\{\begin{array}{rcl} 1^n + a(1) + b & = & 0 \\ (-1)^n + a(-1) + b & = & 0 \end{array}\right.$$

c-a-d $\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & -1 \\ -a+b & = & (-1)^{n+1} \end{array}\right.$, d'où $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2}(-1+(-1)^n) \\ b & = & -\frac{1}{2}(1+(-1)^n) \end{array}\right.}$

Exercice 16

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \forall x \geq 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \text{ fixe}$$

1. Étudions les variations de f sur $[0;+\infty[$

   $$f'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(1+x)^{n-1}(1+x^n)}{(1+x)^{2n}} = \frac{nx^{n-1}(1+x) - n(1+x^n)}{(1+x)^{n+1}}$$

   $$f'(x) = \frac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}},\ \forall x \geq 0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1		2^{1-n}		1

   f admet un minimum au point $x_0 = 1$ qui vaut $f(1) = 2^{1-n}$.

2. (a) On a donc $f(x) \geq 2^{1-n},\ \forall x \in [0;+\infty[$

   c-a-d $\dfrac{1+x^n}{(1+x)^n} \geq 2^{1-n}$ ou encore $\boxed{(1+x)^n \geq 2^{n-1}(1+x^n),\ \forall x \in \mathbb{R}_+}$

   (b) En remplaçant x par $\dfrac{x}{y}$ $\left(\text{pour } \begin{cases} x & \geq & 0 \\ y & > & 0 \end{cases}\right)$ dans l'inégalité précédent, on obtient

   $\boxed{(x+y)^n \leq 2^{n+1}(x^n+y^n)}$ valable aussi pour $\left(\text{pour } \begin{cases} x & \geq & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}\right)$ car $n \geq 2$

Exercice 17

$$f(x) = \frac{1}{n!}x^n(1+x^n),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

On a aussi $f(x) = \dfrac{1}{n!}(x^n + x^{2n})$

donc $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!}\left(A_n^n + A_{2n}^n x^n\right) = \dfrac{1}{n!}\left(n! + n!C_{2n}^n x^n\right)$

D'où $\boxed{f^{(n)}(x) = 1 + C_{2n}^n x^n,\ \forall x \in \mathbb{R}}$

Exercice 18

Il s'agit de tirages simultanés (combinaison) de 6 personnes prises parmi $25 + 32 = 57$

1. Nombre de groupes constitués uniquement d'hommes.

   Il s'agit de tirer les 6 personnes pari les 32 hommes : C_{32}^{6}.

   Soit 906.192 groupes possibles.

2. Nombre de groupes comportant au moins une femme et au moins un homme.

   La négation donne : nombre de groupes ne comportant aucune femme ou aucun homme : $C_{32}^{6} + C_{25}^{6}$

   Donc le nombre de groupes cherchés est $C_{57}^{6} - (C_{32}^{6} + C_{25}^{6})$.

   Soit $36.288.252(906.192 + 177.100) = \boxed{35.204.960}$ groupes.

Exercice 19

1. $Card(A \cup B \cup C) = Card(A \cup [B \cup C])$

   $$= CardA + Card(B \cup C) - Card(A \cap [B \cup C)]$$
   $$= CardA + CardB + CardC - Card(B \cap C) - Card[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$
   $$= CardA + CardB + CardC - Card(B \cap C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) + Card[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$
   $$= CardA + CardB + CardC - Card(B \cap C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$$

2. Soit $\begin{cases} A & : \text{ L'ensemble des matheux} \\ B & : \text{ L'ensemble des sportifs} \\ C & : \text{ L'ensemble des musiciens} \end{cases}$

   Il s'agit donc de calculer $Card(A \cap B \cap C)$ qui est l'ensemble des élèves à la fois matheux, sportifs et musiciens.

   D'aprés 1) on a :

   $$Card(A \cap B \cap C) = Card(A \cup B \cup C) - CardA - CardB - CardC + Card(B \cap C) + Card(A \cap B) + Card(A \cap C)$$
   $$= 34 - 26 - 20 - 7 + 3 + 15 + 4$$
   $$= \boxed{3}$$

   Il y a donc 3 élèves qui satisfait

Exercice 20

Il s'agit de permutations entre matières et entre livres d'une même matière.

1. Les livres doivent être groupés par matières.

   Comme il y a 3 matières, alors on a 3! façons de choisir l'ordre des matières. Ceci étant , il y a : 4! façons de ranger les livres de maths, 6! façons de ranger les livres de statistiques et 5! façons de ranger les livres d'économies.

   Le nombre de rangements cherché est donc le produit :

   $\boxed{3! \times 4! \times 6! \times 5! = 12.441.600}$

2. Il y a 11 livres qui ne sont pas des livres de maths $(11 = 6 + 5)$. Donc on a : $11 + 1 = 12$ emplacements pour les livres de maths.

   Un emplacement étant choisi alors il y a 4! façons de regrouper les livres de maths et 11! façons de regrouper ensemble les livres de statistique et d'économie.

   Le nombre de rangement cherché est donc le produit :

   $\boxed{12 \times 4! \times 11! = 11.496.038.400}$